Poznámky k niekoľkým príkladom

Martin Plesch

2. Pružina

Zaveste zvisle pružinu a nechajte ju voľne padať. Vyšetrite charakteristiky jej pohybu počas voľného pádu.

V prvom rade si musíme uvedomiť, čo sa v tomto príklade očakáva ako ten zaujímavý jav, ktorý máme pozorovať, skúmať a vysvetľovať. Podľa môjho názoru sa jedná o samotné kmitanie pružiny v priebehu voľného pádu, ktoré nastane kvôli veľmi špecifickým počiatočným podmienkam. Tieto počiatočné podmienky sa docielia zavesením pružiny pred samotným pádom a ustálením tejto pružiny.
Aby bol pozorovaný dej „zaujímavý", musí byť splnených niekoľko podmienok. Prvou a základnou je, že hmotnosť samotnej pružiny[1] musí spôsobiť podstatné natiahnutie pružiny. Povedané veľmi jednoducho, zavesená pružina musí byť pozorovateľne dlhšia ako rovnaká pružina voľne položená na podložke. Prepísané do fyzikálnej reči, predĺženie pružiny dané jej vlastnou váhou musí byť rádovo porovnateľné s voľnou dĺžkou pružiny:

$$\Delta l = \frac{m.g}{k} \approx l_0 \tag{1.1}$$

$$\frac{m.g}{l_0.k} \approx 1 \tag{1.2}$$

kde **m** je hmotnosť pružiny, **k** je jej tuhosť a $\mathbf{l_0}$ je voľná dĺžka (dĺžka pružiny mimo pôsobenia gravitačného poľa, ak predpokladáme, že pružina nie je úplne stlačená). Táto podmienka nám určuje požiadavku na samotnú pružinu – mala by byť dostatočne mäkká, inak bude zlomok z rovnice (1.2) príliš malý. Opačná situácia, keď by bol zlomok podstatne väčší ako jedna nemôže nastať z konštrukčného hľadiska – taká pružina by sa sama rozpadla pri manipulácii.

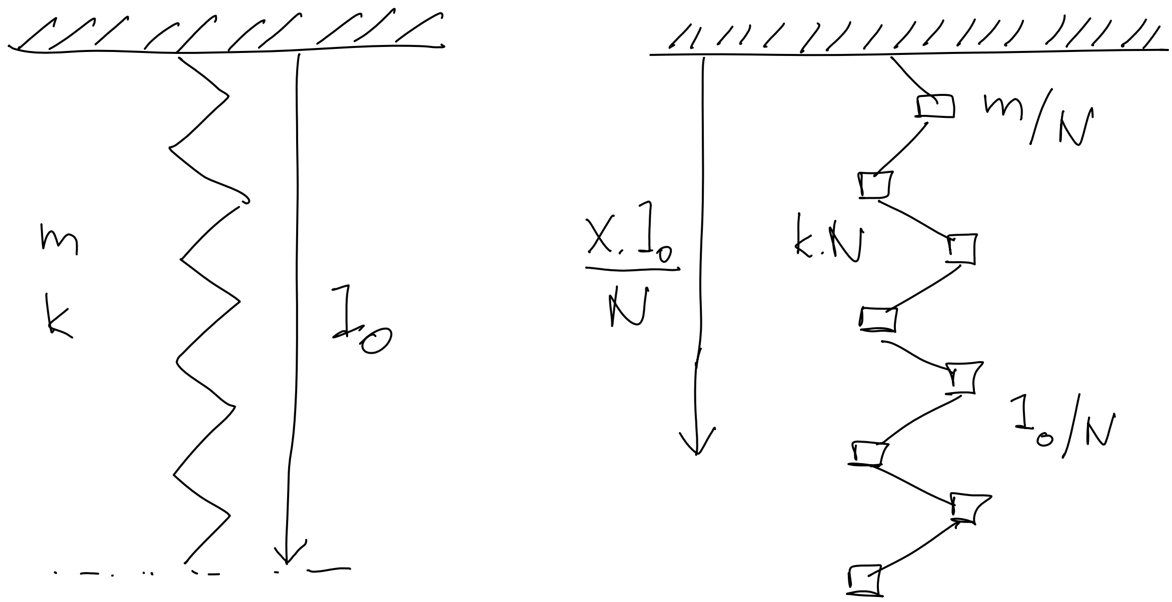
Zavesenie pružiny

Na to, aby sme mohli efektívne skúmať charakteristiku pohybu pružiny, musíme najskôr dôkladne preskúmať počiatočné podmienky tohoto pohybu. Ako bolo spomenuté vyššie, práve tieto podmienky budú na celom probléme najzaujímavejšie, pretože samotný pohyb je definovaný len pôsobením gravitačného poľa (ktoré, ako ukážeme neskôr, sa dá odseparovať) a vlastnými kmitmi pružiny.
Zavesená pružina sa ustáli v polohe, keď sú v rovnováhe gravitačné sily a sily pružnosti pôsobiace na každú časť pružiny. Okrem toho bude ešte ďalšia sila pôsobiť v mieste závesu pružiny, ktorá bude presne kompenzovať celkovú gravitačnú silu **m.g** pôsobiacu na pružinu. Aby sme mohli efektívnejšie pracovať so silami v jednotlivých miestach pružiny, zavedieme malé zjednodušenie.

---

[1] Je potrebné si uvedomiť, že ak spomíname v tomto príklade pružinu, nemáme na mysli pružinu v zmysle, v ktorom sa o nej rozpráva na stredných školách. Pružina „z učebnice" je zidealizovaná pružina, ktorá má svoju tuhosť **k**, ale nemá vlastnú hmotnosť. Je jasné, že podobnú pružinu je ťažké zohnať (podobne ako iné nedostatkové tovary, ako sú hmotný bod alebo rovnobežné svetelné lúče). Naša pružina bude mať okrem tuhosti aj vlastnú hmotnosť **m**. Popis jej pohybu sa po teoretickej stránke preto bude skôr blížiť k popisu struny, ktorý je však komplikovaný a vyžaduje diferenciálny počet, preto sa ním nebudeme bližšie zaoberať.

Bude spočívať v tom, že celú pružinu rozdelíme na **N** malých kúskov pružín. Každý takýto kúsok (ďalej ho budem nazývať pružinka) bude mať hmotnosť $\frac{m}{N}$ a tuhosť **k.N**. Ďalší krok zjednodušenia je presun hmotnosti jednotlivých pružiniek z nej samotnej do formy malého závažia umiestneného medzi pružinkami (schematický prechod je znázornený na obrázku 1).



Obrázok 1. Prechod od hmotnej pružiny k sústave nehmotných pružiniek a malých závaží. Systém je nakreslený pre prípad nulového gravitačného poľa.

V tomto prípade už môžeme bez obáv používať známe vzorce pre nehmotné pružiny, hlavne základný dávajúci do súvisu silu pôsobiacu na pružinu a výchylku

$$F = -k.y. \tag{1.3}$$

Pokúsime sa teraz spočítať, čo sa stane s pružinou po zavesení (alebo, podľa obrázku, po „zapnutí“ gravitačného poľa zeme). Pružina, ktorá je na **x**-tom mieste od bodu závesu, bude ťahaná smerom dole sumárnou gravitačnou silou závaží, ktoré sú zavesené pod ňou. Celkovo týchto závaží bude **N-x,**[2] takže celková sila pôsobiaca na pružinku bude

$$F_x = \frac{N-x}{N} mg \,. \tag{1.4}$$

Výsledná dĺžka **x**-tej pružinky preto bude

$$l_x = \frac{l_0}{N} + \frac{N-x}{N}\frac{mg}{Nk}, \tag{1.5}$$

kde sme spočítali voľnú dĺžku pripadajúcu na jednu pružinku (čo je jedna **N**-tina celkovej voľnej dĺžky pružinky) a natiahnutie pružinky podľa vzorca (1.3).

Čo nás naozaj zaujíma je celková dĺžka pružiny. Očakávali by sme pritom, že táto veličina by nemala závisieť od konkrétne zvoleného **N** v prípade, ak je toto dostatočne veľké a platia zanedbania uvedené v poznámke pod čiarou. Napíšeme teda celkovú dĺžku pružiny vyjadrenú ako súčet dĺžok jednotlivých pružiniek

[2] Pri zavádzaní rozdelenia pružiny na pružinky sme predpokladali, že rozdelenie bude dostatočne jemné, inak povedané, že $N \gg 1$. V tom prípade môžeme položiť približné rovnosti $N-1 \approx N \approx N+1$ a vo všetkých prípadoch používať iba **N**.

$$
\begin{aligned}
l = \sum_{x=1}^{N} l_x &= \sum_{x=1}^{N}\left(\frac{l_o}{N}+\frac{N-x}{N^2}\frac{mg}{k}\right) \\
&= \left(\frac{l_o}{N}+\frac{N}{N^2}\frac{mg}{k}\right)\sum_{x=1}^{N}1-\frac{1}{N^2}\frac{mg}{k}\sum_{x=1}^{N}x \\
&= l_0+\frac{mg}{k}-\frac{1}{2}\frac{mg}{k} \\
&= l_0+\frac{1}{2}\frac{mg}{k}
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

Pri úpravách sme využili známe rovnice $\sum_{x=1}^{N}1 = N$ a $\sum_{x=1}^{N}x = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$. Ako vidíme, pružinka sa nám natiahla o $\frac{1}{2}\frac{mg}{k}$, teda presne o polovicu tej dĺžky, o ktorú by sa natiahla, ak by celá jej hmotnosť ležala na jej konci.

Minimálna dĺžka pružiny

V doterajšom texte sme spomínali tri základné parametre pružiny – jej tuhosť, hmotnosť a voľnú dĺžku. Už pri definícii voľnej dĺžky sme sa zmienili o tom, že prirodzená definícia (teda, že voľná dĺžka zodpovedá dĺžke voľne položenej pružiny) platí len v prípade, ak je možné pružinu ďalej stláčať. Niektoré pružiny však majú takú konštrukciu, že je možné ich použiť len na naťahovanie, ale stláčať sa nedajú. Stáva sa to vtedy, ak sú jednotlivé drôtiky voľne položenej pružiny tesne pri sebe a ich ďalšiemu stláčaniu bráni hrúbka drôtikov. Ak na takúto pružinu pôsobíme dostatočne malou silou, pružina sa vôbec nenatiahne.

Pre tento typ pružiny zavedieme novú veličinu, takzvanú **minimálnu dĺžku** $l_{\min}$. Bude to dĺžka, ktorú dosahuje voľne položená pružina. Definícia voľnej dĺžky l_0 sa zmení a bude vychádzať z minimálnej sily, ktorú je potrebné vynaložiť na to, aby sa pružina začala naťahovať

$$l_0 = l_{\min} - \frac{F_{\min}}{k}. \qquad (1.7)$$

Ako je vidieť, voľná dĺžka je vždy menšia (alebo rovná) ako minimálna dĺžka. Konštrukčne nie je vylúčená ani záporná hodnota veličiny l_0. Typickým prípadom môže byť obyčajná pružina, ktorú sa nám bez poškodenia podarí prevrátiť naruby (prevliecť jeden koniec pružiny vnútrajškom pružiny na druhú stranu). Vznikne nám fyzikálne „nová“ pružina, s hodnotou $l_{\min}$ danou konštrukciou pôvodnej pružiny a voľnou dĺžkou $-l_0$.

Vráťme sa však k nášmu problému. Ak máme pružinu, ktorá má minimálnu dĺžku menšiu ako voľnú dĺžku, môže byť pokus s ňou veľmi zaujímavý. To však len za predpokladu, že sa nám po zavesení aspoň čiastočne natiahne. Aby sa tak stalo, gravitačná sila pôsobiaca na pružinu musí byť väčšia ako minimálna sila potrebná na natiahnutie pružiny

$$mg > F_{\min}. \qquad (1.8)$$

V takom prípade bude (spodná) časť pružiny po zavesení tesne stlačená, a (vrchná) časť pružiny bude natiahnutá. Znovu sa vrátime k rozdeleniu pružiny na mnoho malých pružiniek a spočítame, ktorá pružina (od vrchu) bude posledná natiahnutá pružina. V jej prípade (znovu, pre dostatočne veľké **N**) platí

$$
\begin{aligned}
F_x &= F_{\min} \\
\frac{N - x_n}{N} mg &= \left(l_{\min} - l_0\right) k \quad . \\
\frac{x_n}{N} &= \frac{\left(l_0 - l_{\min}\right) k}{mg} + 1
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Pre všetky **x** väčšie ako (1.9) bude pružina natiahnutá, pre všetky menšie bude maximálne stlačená. Môžeme teraz vypočítať jej výslednú dĺžku, ktorá sa bude skladať z dvoch častí. Prvá časť, úplne stlačená pružina bude mať dĺžku

$$
l_{\min}\left(l_{\min} - l_0\right)\frac{k}{mg} \tag{1.10}
$$

a natiahnutá časť pružiny bude mať dĺžku

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{x_n} l_x = \sum_{x=1}^{x_n}\left(\frac{l_o}{N} + \frac{N - x}{N^2}\frac{mg}{k}\right) \\
&= \left(\frac{l_o}{N} + \frac{N}{N^2}\frac{mg}{k}\right)\sum_{x=1}^{x_n} 1 - \frac{1}{N^2}\frac{mg}{k}\sum_{x=1}^{x_n} x \\
&= N\left(\frac{\left(l_0 - l_{\min}\right)k}{mg} + 1\right)\left(\frac{l_o}{N} + \frac{1}{N}\frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2N^2}\frac{mg}{k} N^2 \left(\frac{\left(l_0 - l_{\min}\right)k}{mg} + 1\right)^2 . \\
&= l_0 + \frac{1}{2}\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}\frac{k}{mg}\left(l_0^{\,2} - l_{\min}^{\,2}\right)
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Po sčítaní oboch dĺžok a zjednodušení dostávame výslednú dĺžku pružiny

$$
l = l_0 + \frac{1}{2}\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}\frac{k}{mg}\left(l_0 - l_{\min}\right)^2 . \tag{1.12}
$$

Je pochopiteľné, že táto dĺžka je väčšia ako dĺžka spočítaná pre pružinu bez minimálnej dĺžky (1.6), pretože jej časť sa nemohla stiahnuť natoľko, ako by si to vyžadovala voľná dĺžka.

Pohyb pružiny

Keď máme teoreticky pripravené počiatočné podmienky pohybu, môžeme sa sústrediť na pohyb samotný. Tento sa dá rozdeliť na dve nezávislé časti – pohyb ťažiska a kmitanie struny okolo ťažiska.

Pohyb ťažiska bude jednoduchý – keďže sumárne na pružinu (ak zanedbáme trenie) pôsobí len gravitačná sila, ťažisko sa bude pohybovať rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom. Oveľa zaujímavejší bude pohyb pružiny okolo ťažiska. Je známe, že sústava pružín a závaží sa môže pohybovať veľmi zložito, avšak tento zložitý pohyb sa dá vždy zložiť z jednoduchých pohybov – takzvaných módov. Napríklad pre tri rovnaké závažia spojené dvoma rovnakými pružinkami existujú dva módy: v jednom stredné závažie stojí a krajné okolo neho symetricky kmitajú, v druhom krajné kmitajú synchrónne (teda oba naraz doprava alebo doľava) a stredné kmitá v opačnej fáze a dvojnásobnej amplitúde.

Nevýhoda módového prístupu je v tom, že počet módov rastie s počtom pružiniek a závaží. Vzhľadom na vysokú symetriu celého systému (rovnaké veľkosti závaží a tuhosti pružiniek) budú síce módy jednoduché, ale bude ich približne **N**, čo je podľa našej požiadavky veľké číslo. Korektným teoretickým riešením by bolo nájsť tieto módy pre nejaké veľké **N**, rozložiť počiatočné podmienky (stav pružinky po zavesení) do týchto módov a spočítať pohyb. Takýto postup je ale veľmi zložitý, navrhnem preto jednoduchší, numerický prístup.

Simulácia

Zdá sa, že najefektívnejšie riešenie problému bude napísať simulačný program. Bude relatívne jednoduchý, vstupom mu bude počet pružiniek **N**, voľné dĺžky pružiniek, ich tuhosti a hmotnosti medzi pružinkami – tieto parametre sa dajú spočítať z voľnej dĺžky a hmotnosti pružiny podľa rovníc uvedených vyššie. Program najskôr spočíta stav zavesenej pružinky na základe požiadavky rovnováhy síl – na každú pružinku musí z oboch strán pôsobiť rovnaká sila, inak sa natiahne alebo skráti. Rovnako na každé závažie musí pôsobiť nulový súčet síl, teda sila od hornej pružinky musí byť rovná sile od dolnej pružinky a gravitačnej sile.

Ďalšia fáza programu bude simulácia samotného pohybu. V prvej fáze, pri nachádzaní ustáleného pohybu, zostala sila pôsobiaca na horný záves pružiny veľkosti **m.g**, ktorá bola kompenzovaná zavesením. Keď sa pružina „odvesí", sila prestane byť kompenzovaná. Program bude postupne počítať sily pôsobiace na jednotlivé závažia a s využitím rovnice

$$F = ma \tag{1.13}$$

vypočítavať ich zrýchlenia. S malou časovou konštantou[3] bude rátať zmeny rýchlosti závaží a zmeny ich polohy. Opakovaním výpočtu sa postupne docieli simulácia celého pohybu.

Mierna komplikácia nastane, ak nám na začiatku, alebo v priebehu pohybu nastane situácia, že niektorá z pružiniek dosiahne svoju minimálnu dĺžku. Je jasné, že táto pružina sa nemôže už ďalej skracovať. V tomto prípade sú možné dva modely – pružná a nepružná zrážka dvoch závaží na konci pružiny. To znamená, že závažia sa buď budú po zrážke pohybovať od seba rovnakou relatívnou rýchlosťou, akou sa pred zrážkou pohybovali smerom k sebe (pružná zrážka), alebo sa budú ďalej pohybovať spolu rovnakou rýchlosťou (ich pôvodná priemerná rýchlosť, nepružná zrážka). Skutočnosť bude niečo medzi tým, pravdepodobne však bližšia nepružnej zrážke. V prvých verziách programu preto odporúčam implementovať nepružnú zrážku a ak by výsledky nezodpovedali realite, zaviesť koeficient odrazu (pomer medzi relatívnou rýchlosťou pred a po zrážke) a odladiť jeho hodnotu podľa experimentálnych dát

Určovanie parametrov

Ako bolo spomenuté vyššie, časť parametrov simulácie musí pochádzať z experimentu. Najjednoduchšie je namerať hmotnosť pružiny – jednoducho ju odvážime. Použijeme pri tom najlepšie takú pružinu, ktorá nemá relevantnú časť svojej hmotnosti umiestnenú na koncoch – teda žiadne extra háčiky alebo upevnenia. Pružina by tiež mala byť homogénna, nie zakrivená a pri vodorovnom natiahnutí by sa mala deformovať v každej svojej časti rovnako.

Ak má pružina minimálnu dĺžku, tiež ju jednoducho odmeriame. Keďže pružina bude pri svojom pohybe kmitať, teda sa aj stláčať, je vhodné minimálnu dĺžku zmerať aj v prípade, ak voľne položená pružina nie je úplne stlačená. Ak sa dá, pružinu stlačíme do stavu, keď sa jednotlivé drôty navzájom dotýkajú, a zmeriame jej dĺžku.

Najpodstatnejšie meranie bude meranie tuhosti pružiny, spojené s meraním voľnej dĺžky. Vyjde z rovnice pre silu pružiny

$$\begin{aligned} F &= -ky \\ &= -k\left(l - l_0\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

kde **F** je sila napínania pružiny pri jej celkovej dĺžke **l**. Hodnoty **F** a **l** nameriame pre niekoľko rôznych natiahnutí pružiny a nanesieme do grafu. Preložíme nimi priamku, hodnotu **k** odčítame zo smernice priamky a hodnotu l_0 z miesta, kde priamka pretína nulovú silu. Je pritom dôležité, aby sme experimenty robili s pružinou položenou na hladkej podložke – ak by sme ju zavesili, do hry by vstupovalo už aj predĺženie podľa rovnice (1.6), resp. (1.12). Na

[3] Časovú konštantu môžeme určiť tak, že ju budeme postupne zmenšovať a spúšťať program s rovnakými vstupnými parametrami. Keď jeho výsledky prestanú závisieť od konštanty, našli sme vhodnú hodnotu. Rovnako môžeme postupovať pri voľbe **N**. Budeme ho postupne zvyšovať, kým nebudú výsledky programu závisieť od zmeny čísla.

meranie sily však použijeme závažia, pripevnené na pružinu silonom cez kladku – priame meranie sily silomerom je príliš nepresné, hlavne pre malé hodnoty sily.

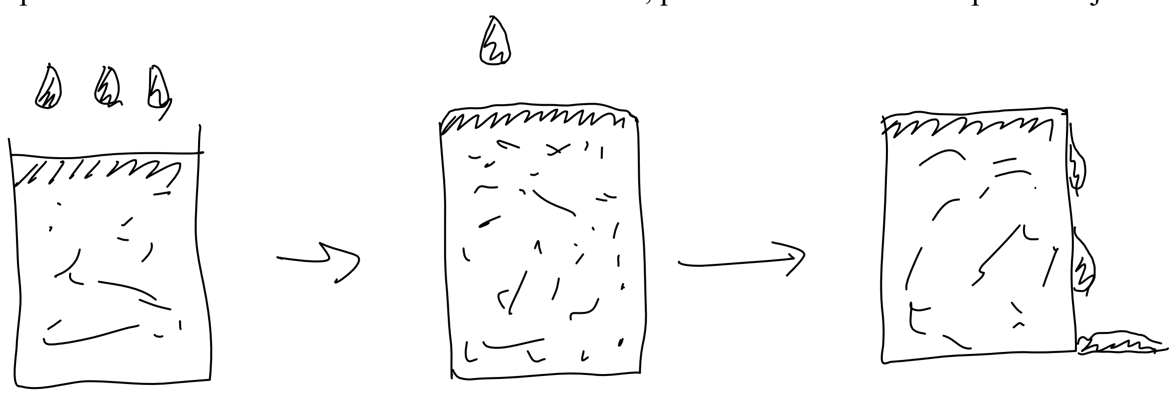
Porovnanie teórie, simulácie a experimentu

Po nameraní hodnôt m, k, l_0 a $l_{\min}$ postupom popísaným vyššie najskôr overíme súlad týchto hodnôt so základnou teóriou. Zavesíme pružinu, odmeriame jej dĺžku a porovnáme s dĺžkou vypočítanou podľa (1.6), resp. (1.12). Ak výsledky súhlasia, pristúpime k porovnaniu so simuláciou. Zasa, na začiatku porovnáme dĺžku zavesenej pružiny, ktorý spočíta simulačný program, s nameranou a vypočítanou hodnotou. Po spustení simulácie porovnávame pohyb pružiny s experimentom – tu je vhodné použiť buď fotoaparát so sekvenčným snímaním, alebo rýchlu kameru s rýchlou uzávierkou. Pre jednoduchšie porovnávanie dát je dobré nakresliť si na pružinu farebné značky a porovnávať len niekoľko miest – začiatok, koniec, stred a podobne.

16. Vodná kaskáda

Položte vlnitú hadicu na svah. Pustite vodu cez hadicu a potom ju opatrne zastavte. Vyšetrite správanie systému, ak do hadice kvapkáme vodu.

Pri tomto probléme bude hrať kľúčovú úlohu vlastnosť vody nazývaná **kapilarita**. Táto vlastnosť núti jednotlivé čiastočky vody držať sa pohromade a je spôsobená vzájomným silovým pôsobením molekúl vody. Z makroskopického hľadiska sa prejavuje energetickými stratami pri vytváraní povrchu vody. Inak povedané, každý kúsok povrchu vody stojí nejakú energiu a voda sa snaží udržiavať taký tvar, aby jej energia bola čo najmenšia. Preto napríklad mimo gravitačného poľa voda (po ustálení) zaujme približne guľový tvar.
Na zemi však gravitačné pole pôsobí a v porovnaní s energiami z kapilárnych javov je jeho vplyv pomerne silný. Preto vo všeobecnosti vnímame javy spôsobené kapilaritou (stúpanie vody v tenkej pipete, nasávanie atramentu do pijavého papiera a podobne) ako akúsi anomáliu, niečo, čo je neprirodzené.
Podobne je tomu napríklad aj pri možnosti „preplniť" pohár vodou až nad jeho okraj. Tento experiment veľmi úzko súvisí so skúmanou úlohou, preto si ho rozoberieme podrobnejšie.



Obrázok 2. Ak do pohára postupne kvapkáme vodu, naplní sa a okraj vody postupne presiahne okraj pohára. Po ďalšom pridávaní vody sa pohár v istom momente preleje, pričom vytečie podstatne viac vody, ako bola povestná posledná kvapka, ktorá vyliatie spôsobila.

Schéma javu, ktorý je schematicky znázornený na Obrázku 2, si našla cestu dokonca aj do ľudovej slovesnosti. Známe sú slová o poslednej kvapke, ktorá spôsobí pretečenie pohára.

Nebyť však kapilarity, o žiadnom pretečení by nemohla byť reč. Kvapka, ktorá by sa už do pohára nezmestila, by jednoducho sama odtiekla von.
Keďže však kapilarita existuje, prvá (ani druhá či desiata) kvapka, ktorá sa už do pohára technicky nezmestí, nevytečie. Pre vodu je totiž energeticky výhodnejšie, aby vytvorila „vydutý“ okraj a kvapku pohltila, než aby dovolila kvapke vytiecť. Pridávaním ďalších a ďalších kvapiek sa však postupne povrch vody stále viac zaobľuje a mierne zväčšuje, rovnako stúpa aj ťažisko celej masy vody. Pri obávanej poslednej kvapke presiahne energia potrebná na ďalšie zvýšenie ťažiska a zväčšenie povrchu vody energiu potrebnú na „vypustenie“ časti vody von. Pritom je vypustené také množstvo vody, ktoré sa ukáže ako energeticky najvýhodnejšie – musí byť dostatočné, aby spôsobilo relevantný pokles ťažiska zvyšnej vody v pohári a tým vykompenzovalo energiu potrebnú na vytvorenie vlastného povrchu. Koľko presne to bude veľmi závisí od ťažko kontrolovateľných podmienok – presného tvaru a materiálu pohára, hlavne jeho okraja, výšky pohára, teploty vody a podobne. Z experimentálnych (a historických) skúseností sa však dá hovoriť o množstve zodpovedajúcom zhruba desiatkam až stovkám kvapiek.
Vráťme sa však k nášmu problému – vodnej kaskáde. Tá sa dá predstaviť ako sústava pohárov, ktoré postupne opatrne napĺňame. Posledná kvapka v najvrchnejšom pohári kaskády spôsobí jeho pretečenie – do spodnejšieho pohára sa tak dostane relatívne veľké množstvo vody. Tento pohár tiež pretečie a vytečie z neho ešte viac vody ako z prvého. Týmto sa spôsobí lavína, ktorá sa na konci prejaví veľkým množstvom vytečenej vody, ktoré spôsobila jediná kvapka na začiatku.
V tomto príklade je veľmi ťažké niečo exaktne spočítať. Spomeňme preto aspoň parametre, ktoré budú mať na jav vplyv:

- **Bočný prierez rúry.** Definuje tvar a veľkosť komôrok, improvizovaných pohárov. Od neho tiež kritický závisí množstvo vytečenej vody z jednej komôrky a tým pádom aj sila nestability.
- **Zmáčavosť vnútorného materiálu rúry.** Zmáčavosť je vlastnosť materiálu, od ktorej závisí energia potrebná na vytvorenie povrchu vody a tohoto materiálu. Ak by bol materiál dobre zmáčavý, už pri malom preplnení by komôrky pretiekli a efekt by bol málo výrazný. Odporúča sa preto nezmáčavý materiál, teda taký, na ktorom voda vytvára veľké a výrazné kvapky (rovnako ako napríklad na teflónovej panvici).
- **Sklon rúry.** Nájsť správny sklon rúry bude jedna z kľúčových ťažkostí problému. Ak by bol sklon príliš malý, komôrky v rúre by sa nechovali ako samostatné poháre, ale ako jedna jediná (alebo niekoľko málo) sústava pohárov. Aj po zastavení prívodu vody by sa nevytvorili samostatné povrchy, ale jeden súvislý povrch. V takomto prípade by jav nefungoval. Ak by sme naopak sklon rúry nastavili príliš strmo, jednotlivé komôrky by mali príliš malý objem. Na to, aby efekt fungoval, musí byť objem komôrky, pohára podstatne väčší ako objem kvapky. Ak tomu tak nie je, pridaním jednej kvapky pridáme napríklad pol pohára a ten, pochopiteľne, okamžite pretečie. Dostatočne veľké komôrky sú preto dôležité na dosiahnutie možnosti „citlivého napĺňania“. Preto je nutné nájsť vhodný kompromis, najlepšie experimentálne pripevniť rúru na tvrdú podložku a skúšať rôzne náklony.
- **Dĺžka rúry.** Od nej bude závisieť intenzita javu, ale aj náročnosť prípravy. Pri krátkej rúre, obsahujúcej len niekoľko komôrok, dosiahneme jav veľmi ľahko, lebo nebude problém dostať väčšinu komôrok do preplneného stavu. Na druhej strane, jav bude slabší, lebo na konci sa nazbiera voda iba z malého počtu komôrok. Naopak pri veľmi dlhej rúre bude prakticky nemožné docieliť preplnenosť podstatnej časti komôrok, pri napĺňaní sa vplyvom fluktuácií budú spúšťať lokálne laviny a vyprázdňovať jednotlivé časti rúry. Aj v tomto prípade očakávam vhodnú, kompromisnú dĺžku rúry. Pri nej

bude jav najsilnejší, pri skracovaní bude častejší a slabší. Pri ďalšom predlžovaní rúry sa jav v podstate meniť nebude, bude však s ňou ťažšia experimentálna manipulácia.

V riešení úlohy predpokladám popis javu, podporený množstvom experimentálnych výsledkov. Výsledky by mali mať základ v použití rôznych rúr rôznych dĺžok pri rôznych náklonoch. Merania by mali byť kvantitatívne, treba zmerať množstvo vytečenej vody a porovnať s jednou kvapkou. Zaujímavé tiež bude skúmať možnosť meniť vlastnosti povrchu hadice (prepláchnutie olejom, alebo saponátom), prípade závislosť javu od teploty vody.

8. Kondenzácia

Na pohári naplnenom studenou vodou sa tvoria vodné kvapky. Vysvetlite tento jav a vyšetrite parametre, ktoré určujú rozmer a množstvo kvapiek na pohári.

Ak v predchádzajúcom príklade hrala kritickú úlohu kapilarita, v tomto to bude vzdušná vlhkosť. To je dôležité si uvedomiť predtým, ako začneme akékoľvek teoretické či experimentálne bádanie.

Vodné kvapky, alebo orosenie pohára je spôsobené kondenzáciou vodnej vlhkosti na jeho studených stenách. Podstatne teda nesúvisí so skutočnosťou, že v pohári je studená voda. Rovnako dobre by to fungovalo v prípade, ak by sme mali v pohári olej, alebo by bol pohár prázdny – dôležité je len, aby bol studený.

Voda podľa zadania v ňom však istú úlohu hrá. Zabezpečuje slušnú teplotnú stabilitu pohára (prázdny pohár vytiahnutý z chladničky by sa nám podstatne rýchlejšie ohrial) a uľahčuje meranie teploty. V malej miere môže tiež odparovanie vody z pohára zvyšovať lokálnu vlhkosť a tým podporovať kondenzáciu na jeho stenách.

Teória vlhkosti

Pojem vlhkosti sa dá vysvetliť ako miera obsahu vodnej pary vo vzduchu. Čím je vzduch vlhkejší, tým viac vodnej pary obsahuje. Zavádzajú sa dva pojmy, relatívna a absolútna vlhkosť, ktoré navzájom úzko súvisia.

Absolútna vlhkosť vo vzduchu sa udáva buď v jednotkách hustoty $\rho\left[\frac{g}{m^3}\right]$ a vtedy označuje množstvo vodnej pary nachádzajúce sa kubickom metri vzduchu. Tento parameter je závislý len od tlaku vzduchu – ak zoberieme daný objem vzduchu, pri zmene teploty a konštantnom objeme sa nebude meniť. Druhý spôsob určenia absolútnej vlhkosti je pomocou tlaku nasýtených vodných pár, teda v Pascaloch. Určuje, akým tlakom pôsobia rozptýlené vodné pary vo vzduchu na svoje okolie. Obe veličiny navzájom súvisia pomocou stavovej rovnice

$$pV = NkT$$

$$p = \frac{1}{V}\frac{m}{M_m}RT\,. \qquad (3.1)$$

$$p = \frac{\rho RT}{M_m}$$

Určenie absolútnej vlhkosti sa teda zdá byť jednoduché – zoberieme kus vzduchu, zistíme, koľko je v ňom vody a pri danej teplote a tlaku máme vlhkosť. Problém však je, že (na rozdiel napríklad od teploty alebo tlaku) absolútna vlhkosť nie je to, čo my ako ľudia reálne vnímame. Ak sa nám napríklad zdá, že v miestnosti alebo vonku je vlhko (typicky pred búrkou), vôbec to nemusí znamenať, že je vysoká absolútna vlhkosť vzduchu.

Zvádza sa preto iná veličina, **relatívna vlhkosť**, ktorá je definovaná ako pomer absolútnej vlhkosti vzduchu a maximálnej prípustnej vlhkosti vzduchu pri danom tlaku a teplote

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_{\max}}. \qquad (3.2)$$

Udáva sa v percentách, typicky sa pohybuje v rozsahu 30% až 70% a práve na túto veličinu sme ako ľudia citliví – vlhko sa nám zdá vtedy, ak je vysoká relatívna vlhkosť vzduchu.
Samozrejme však vyvstáva otázka, ako sa dá určiť maximálna prípustná vlhkosť vzduchu, a prečo vôbec niečo také existuje. Na druhú otázku sa dá dať veľmi naivná odpoveď, ktorá využije paralelu s rozpúšťaním v kvapalinách. Aj cukru, prípade soli sa dá do istého množstva vody rozpustiť iba obmedzené množstvo. Potom sa už ďalšie molekuly pevnej látky nemajú na aké molekuly vody viazať a proces rozpúšťania sa zastaví.[4] Podobne sa to dá predstaviť aj pri vode a vzduchu – pri danej teplote a tlaku sa do vzduchu dostane iba isté množstvo pár a viac nie. Toto množstvo pár sa nazýva **hustota nasýtených pár** a tlak produkovaný týmito parami sa nazýva **tlak nasýtených vodných pár.** Tieto veličiny sa dajú (relatívne jednoducho) spočítať pomocou Clausiusovej-Clapeyronovej rovnice

$$\frac{\mathbf{d}p}{\mathbf{d}T} = \frac{Lp}{RT^2}. \qquad (3.3)$$

V tomto prípade to však zrejme nebude potrebné, nakoľko tlaky a hustoty nasýtených vodných pár sa nachádzajú v intervaloch 5°C aj v Matematicko-fyzikálnych tabuľkách pre stredné školy. Vychádzajme teda z toho, že tieto tlaky a hustoty poznáme (pre teploty medzi udanými hodnotami použijeme interpoláciu).

Kondenzácia

Ako sme spomínali vyššie, ak definovaný objem vzduchu schladíme, jeho absolútna vlhkosť (meraná hustotou pri nezmenenom tlaku) sa nezmení. Avšak, hustota nasýtených vodných pár sa (výrazne) zmení. Tým pádom sa nám výrazne zmení (stúpne) aj relatívna vlhkosť. Môže sa pri tom stať, že táto relatívna vlhkosť by prekročila 100%, teda že by skutočná hustota pár vo vzduchu prekročila maximálnu prípustnú hustotu. V tomto momente nastáva jav zvaný kondenzácia, keď sa prebytočná vlhkosť vyzráža.
Kondenzáciu môžeme denne pozorovať okolo nás. Ranná rosa je skondenzovaná vzdušná vlhkosť, ktorá sa musela zo vzduchu dostať po jeho večernom ochladení. Rovnako je to s dažďom, keď sa vlhký vzduch dostane do chladnejšieho prostredia. Kondenzovanú vodu vidíme aj v chladničke, ako sa zráža na zadnej chladivej stene a odteká. Rovnako pri klimatizačných jednotkách musíme odvádzať skondenzovanú vodu mimo chladenej miestnosti.
V našom prípade sa bude vzduch z miestnosti ochladzovať o studenú stenu pohára. Na to, aby sme pozorovali kondenzáciu, musí vlhkosť vzduchu, schladeného na teplotu pohára, stúpnuť na úroveň 100%. Tým je definovaná požiadavka na minimálnu relatívnu vlhkosť vzduchu v miestnosti – ak máme 25°C miestnosť a 10°C pohár, je to okolo 38%. V prípade, ak máme vlhkosť vzduchu v miestnosti menšiu, kondenzáciu pozorovať nebudeme.
To sa môže stať hlavne v zimnom období v dobre vetranej miestnosti. Musíme si uvedomiť, že vzduch, ktorý prišiel zvonka (kde, povedzme, mrzne), má v sebe len toľko vlhkosti, koľko mu bolo povolené vonku. Teda relatívne málo. Ak mu po oteplení nepridáme extra vlhkosť, ani po jeho ochladení na stene pohára nebudeme môcť pozorovať kondenzáciu. Zvlášť v zimnou období je teda vhodné pri experimentovaní zvýšiť vlhkosť vzduchu v miestnosti – dá sa to prítomnosťou väčšieho množstva ľudí (ktorí „nadýchajú“), rozliatím vody (odporúča

[4] V skutočnosti sa proces dostane do takzvanej dynamickej rovnováhy, keď sa vyzráža za jednotku času rovnaké množstvo látky, ktoré sa dokáže rozpustiť. Efektívne sa ale navonok systém tvári tak, že sa žiadna ďalšia látka nerozpúšťa.

sa namiesto toho napríklad umyť dlážku, alebo mokrou handričkou poutierať prach, zabijeme tým dve muchy jednou ranou), vyvesením mokrého prádla, umytím riadu a podobne. Je tiež možné použiť umelé zvlhčovače, vlhkosť v miestnostiach zvyšujú aj kvety.

Experiment

Ako bolo popísané vyššie, prvým predpokladom úspešného experimentu je, že budeme pozorovať kondenzáciu. Rozhodne to však nestačí. V prvom rade musíte mať pod dobrou kontrolou parametre experimentu, hlavne

- Teplotu pohára a jej priebeh s časom
- Teplotu okolia
- Vlhkosť (relatívnu) okolia
- Teplotu v tesnej blízkosti pohára
- Povrch chladnej časti pohára.

Na meranie vlhkosti je dobré použiť poriadne meracie zariadenie, obyčajné vlhkomery, ktoré sú súčasťou domácich meteorologických staníc, bývajú značne nepresné, resp, sa s časom rozladia. Jeden z možných testov je na vlhkomer nadýchať – mal by sa blížiť k hodnote 100%.

Jedna z prvých veličín, ktorá sa dá merať, je množstvo nakondenzovanej vody v závislosti od času. Ak máme k dispozícii naozaj dobré váhy, dá sa to robiť priamo meraním zmeny hmotnosti pohára ako funkcie času. V tom prípade je ale nutné pohár zakryť, aby sme nestrácali hmotnosť odparovaním.

Keďže však je zmena hmotnosti podstatne menšia ako hmotnosť samotná (gram voči stovkám gramov), dá sa merať aj len samotná nakondenzovaná voda. Napríklad je možné použiť kuchynskú papierovú utierku – presne ju zvážime, potom ňou dôkladne utrieme pohár a znova zvážime. Tento spôsob merania je však deštruktívny a nedá sa ním merať priebeh kondenzácie postupne.

Výsledkom experimentu by mali byť závislosti množstva kondenzátu od parametrov uvedených vyššie, prípade od ďalších parametrov ako nútené prúdenie vzduchu okolo pohára a podobne. Samotná veľkosť a tvar kvapiek bude pochopiteľne závislý od množstva kondenzátu a rýchlosti jeho tvorby. Ako ďalšie parametre budú vstupovať

- **Zmáčavosť vonkajšieho povrchu pohára**. Pri vysokej zmáčavosti sa budú tvoriť maličké kvapôčky, ktoré budú vytvárať skoro súvislý povrch. Pri malej zmáčavosti (dá sa dosiahnuť napríklad namastením pohára) sa budú tvoriť skôr veľké kvapky, ich celková tvorba môže byť však nepatrne nižšia.
- **Nútený obeh vzduchu**. Ak by sme spôsobovali silné prúdenie vzduchu okolo pohára, kvapky budú menšie.
- **Tvar pohára.** Na presne zvislých hladkých stenách pohára sa budú robiť iné kvapky ako na štruktúrovaných stenách (napríklad) brúsených pohárov.

V rámci riešenia úlohy sa očakáva v prvom rade dobré experimentálne zvládnutie. Súlad teórie a experimentu má byť preukázaný minimálne v určovaní, či kondenzácia nastane. Tiež má byť posúdené množstvo kondenzátu v závislosti od času a odhad realistickosti množstva vzduchu, ktoré na to muselo vydať svoju vlhkosť. Aspoň kvalitatívny súlad by mal byť pri závislosti veľkosti kvapiek od zmáčavosti povrchu.